УДК 517.518

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА[1)]

Р.З. ДАУТОВ, М.Р. ТИМЕРБАЕВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: rdautov@kpfu.ru, Marat.Timerbaev@kpfu.ru

SHARP ESTIMATES OF THE POLYNOMIAL APPROXIMATION IN THE WEIGHTED SOBOLEV SPACES

R.Z. DAUTOV, M.R. TIMERBAEV

Kazan Federal University

Аннотация

Получены точные оценки погрешности наилучшего приближения алгебраическими многочленами в весовых пространствах Соболева с весами Якоби, Лагерра и Эрмита. Показано, что связанные с этими весами ортогональные многочлены образуют ортогональный базис в соответствующем весовом пространстве Соболева. Получены точные оценки типа Маркова.

Ключевые слова: весовые пространства Соболева, ортогональные многочлены, наилучшие приближения, точные оценки погрешности

Summary

We obtain exact error estimates of the best approximation by algebraic polynomials in weighted Sobolev spaces with weights of Jacobi, Laguerre and Hermite. It is shown that the linked with these weights orthogonal polynomials form an orthogonal basis in the corresponding weighted Sobolev space. We obtain exact estimates of Markov type.

Key words: Weighted Sobolev space, orthogonal polynomials, best approximation, sharp error estimate

Введение

Получены точные оценки погрешности наилучшего приближения алгебраическими многочленами в весовых пространствах Соболева с весами Якоби, Лагерра и Эрмита. Показано, что связанные с этими весами ортогональные многочлены образуют ортогональный базис в соответствующем весовом пространстве Соболева. Получены точные оценки типа Маркова.

1. Весовые пространства

Далее через $\Omega = (a, b)$ обозначается конечный или бесконечный интервал числовой оси R, через $\omega_\alpha = \omega_\alpha(x)$ — одна из весовых функций Якоби, Лагерра или Эрмита. Таким образом, рассматриваются следующие три типа весов:

$$\omega_\alpha(x) = (1-x)^{\alpha_1}(1+x)^{\alpha_2},\;\; \alpha_1, \alpha_2 > -1,\;\; (a,b) = (-1,1); \tag{1}$$

$$\omega_\alpha(x) = x^\alpha\, e^{-x},\;\; (a,b) = (0,\infty), \quad \alpha > -1; \tag{2}$$

$$\omega_\alpha(x) = e^{-x^2},\;\; (a,b) = (-\infty,\infty). \tag{3}$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00908, 12-01-97026).

С весовой функцией (1) связаны многочлены Якоби $P_n^{(\alpha)} = P_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}$, частными случаями которых являются многочлены Чебышева и Лежандра. С весами (2), (3) связаны многочлены Лагерра (L_n^α) и Эрмита (H_n) соответственно. Эти многочлены образуют ортогональный базис в соответствующем весовом пространстве Лебега $L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)$, наделенном скалярным произведением

$$(u,v)_{L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \int_a^b \omega_\alpha(x)\, u(x)v(x)\, dx$$

и нормой $\|u\|_{L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)} = (u,u)^{1/2}_{L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)}$ (см., напр., [1, теоремы 3.1.5, 5.7.1]).

При целых $m \geqslant 0$ определим весовые пространства Соболева

$$V^m_{\omega_\alpha}(\Omega) = \{v \in L^2_{\omega_\alpha}(\Omega) : D^s v \in L^2_{\omega_{\alpha+s}}(\Omega),\ 0 \leqslant s \leqslant m\}.$$

Здесь D^s есть оператор обобщенного дифференцирования порядка s на Ω, $D = D^1$, $D^0 u = u$; в случае мультииндекса α принято, что $\alpha{+}s = (\alpha_1{+}s, \alpha_2{+}s)$ при $s \in R$. Эти пространства наделяются скалярным произведением

$$(u,v)_{V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \int_a^b \sum_{s=0}^m \omega_{\alpha+s}(x)\, D^s u(x)\, D^s v(x)\, dx$$

и нормой $\|u\|_{V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)} = (u,u)^{1/2}_{V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)}$. Отметим, что $V^0_{\omega_\alpha}(\Omega) = L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)$. Через $|u|_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)}$ далее обозначается полунорма

$$|u|^2_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \int_a^b \omega_{\alpha+s}(x) |D^s u(x)|^2\, dx\,.$$

Поскольку во всех случаях весовая функция ω_α локально-ограничена, то $V^m_{\omega_\alpha}(\Omega) \subset W^m_{2,\mathrm{loc}}(\Omega) \subset C^{m-1}(\Omega)$. Стандартные рассуждения на основе неравенства Харди позволяют доказать, что введенная выше норма на $V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)$ эквивалентна следующей

$$\|u\|_{H^m_{\omega_{\alpha+m}}(\Omega)} = \Big(\int_a^b \omega_{\alpha+m}(x) \sum_{s=0}^m \big|D^s u(x)\big|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

Отметим также, что весовая функция (3) не зависит от параметра (точнее, функция $\alpha \to \omega_\alpha$ является постоянной). Мы используем индекс α в этом случае для того, чтобы иметь возможность одновременно рассматривать все три типа весовых функций. В случае веса Эрмита обе указанные выше нормы равны и

$$\|u\|^2_{V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sum_{s=0}^m \big|D^s u(x)\big|^2\, dx\,.$$

2. Уравнение высокого порядка для ортогональных многочленов

Лемма 1. *Пусть ω_α — одна из весовых функций (1) — (3), $\{p_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ — соответствующая ей система ортогональных многочленов. Тогда найдутся числа $\lambda_{sn}^{(\alpha)}$ такие, что $\lambda_{sn}^{(\alpha)} > 0$ при $s \leqslant n$ и при $s \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$*

$$(-1)^s D^s\big(\omega_{\alpha+s} D^s p_n^{(\alpha)}\big) = \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, \omega_\alpha p_n^{(\alpha)} \quad \text{на} \quad (a,b)\,. \tag{4}$$

Кроме того, при $s < t \leqslant n$ функция $n \to C^2_{stn\alpha} = \lambda_{sn}^{(\alpha)}/\lambda_{tn}^{(\alpha)}$ убывает.

Доказательство. Хорошо известно, что классические ортогональные многочлены при определенных $\lambda_n^{(\alpha)}$, $d_n^{(\alpha)}$ на Ω удовлетворяют уравнениям

$$-D\big(\omega_{\alpha+1}Dp_n^{(\alpha)}\big)=\lambda_n^{(\alpha)}\,\omega_\alpha\,p_n^{(\alpha)},\quad n\geqslant 0, \tag{5}$$

$$Dp_n^{(\alpha)}=d_n^{(\alpha)}\,p_{n-1}^{(\alpha+1)},\quad n\geqslant 1, \tag{6}$$

причем функция $n\to\lambda_n^{(\alpha)}$ является возрастающей, $\lambda_n^{(\alpha)}>0$ при $n>0$. Определим

$$\lambda_{sn}^{(\alpha)}=\lambda_n^{(\alpha)}\lambda_{n-1}^{(\alpha+1)}\cdots\lambda_{n-s+1}^{(\alpha+s-1)},\quad s\leqslant n,$$

и положим $\lambda_{sn}^{(\alpha)}=0$ при $s>n,\ \lambda_{0n}^{(\alpha)}=1$.

Пусть c есть некоторая внутренняя точка $\Omega,\ I(f)=\int\limits_c^x f(x)\,dx$. Используем (6) для преобразования левой части (5). После интегрирования результата получим реккурентную по α формулу

$$I\big(\omega_\alpha p_n^{(\alpha)}\big)(x)=-\,\frac{d_n^{(\alpha)}}{\lambda_n^{(\alpha)}}\,\omega_{\alpha+1}(x)\,p_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)+p_0(x),\quad p_0\in\mathcal{P}_0.$$

Проинтегрируем последовательно это соотношение $s-1$ раз по x. Тогда при $s\leqslant n$

$$\lambda_{sn}^{(\alpha)}\ I^s\big(\omega_\alpha p_n^{(\alpha)}\big)=(-1)^s\ d_{sn}^{(\alpha)}\ \omega_{\alpha+s}\,p_{n-s}^{(\alpha+s)}+p_{s-1},\quad p_{s-1}\in\mathcal{P}_{s-1}\,, \tag{7}$$

где $d_{sn}^{(\alpha)}=d_n^{(\alpha)}d_{n-1}^{(\alpha+1)}\cdots d_{n-s+1}^{(\alpha+s-1)}$. Последовательно дифференцируя (6), получаем

$$\omega_{\alpha+s}D^sp_n^{(\alpha)}=d_{sn}^{(\alpha)}\,\omega_{\alpha+s}\,p_{n-s}^{(\alpha+s)},\quad s\leqslant n\,. \tag{8}$$

Дифференцируя s раз равенства (7), (8) и сравнивая их, получим (4). Ясно, что (4) справедливо при всех $s>n$ при $\lambda_{sn}^{(\alpha)}=0$, а также при $s=0$. Ясно также, что при $t>s$ величина

$$\lambda_{sn}^{(\alpha)}/\lambda_{tn}^{(\alpha)}=1/\big(\lambda_{n-s}^{(\alpha+s)}\cdots\lambda_{n-t+1}^{(\alpha+t-1)}\big)$$

убывает с ростом n.

Приведем известные значения величин $\lambda_n^{(\alpha)}$, $d_n^{(\alpha)}$ (их можно найти, напр., в [1, гл. IV, V])), а также величин $\lambda_{sn}^{(\alpha)}$, $C_{stn\alpha}$, фигурирующих в лемме 1. Оценка последней при больших n получается с использованием формулы Стирлинга $\Gamma(x+1)=(2\pi\,x)^{1/2}\,x^x\,e^{-x}(1+O(x^{-1/5}))$. Далее будем считать, что с каждой весовой функцией ω_α связаны свои величины $C_{stn\alpha}$ согласно приведенным ниже формулам.

1. Весовая функция Якоби. В этом случае $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ — векторный параметр, функции $p_n^{(\alpha)}$ есть многочлены Якоби. Положим $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$. Тогда

$$\lambda_n^{(\alpha)}=n(n+|\alpha|+1),\quad d_n^{(\alpha)}=2^{-1}(n+|\alpha|+1),\quad \lambda_{sn}^{(\alpha)}=\frac{n\,!\;\Gamma(n+s+|\alpha|+1)}{(n-s)!\;\Gamma(n+|\alpha|+1)}\,,$$

$$C_{stn\alpha}^2=\frac{(n-t)!}{(n-s)!}\ \frac{\Gamma(n+s+|\alpha|+1)}{\Gamma(n+t+|\alpha|+1)}\,,\quad C_{stn\alpha}\leqslant c_{st}\,\big(n\,(n+|\alpha|)\big)^{-(t-s)/2}.$$

2. Весовая функция Лагерра. В этом случае α есть скалярный параметр, функции $p_n^{(\alpha)}$ совпадают с многочленами Лагерра,

$$\lambda_n^{(\alpha)}=n,\quad d_n^{(\alpha)}=-1,\quad \lambda_{sn}^{(\alpha)}=n\,!/(n-s)!\,,$$

$$C_{stn\alpha}^2=(n-t)!/(n-s)!\,,\quad C_{stn\alpha}\leqslant c_{st}\,n^{-(t-s)}\ .$$

3. Весовая функция Эрмита. В этом случае весовая функция не зависит от параметра, функции $p_n^{(\alpha)}$ совпадают с ортогональными многочленами Эрмита,

$$\lambda_n^{(\alpha)}=2n,\quad d_n^{(\alpha)}=2n,\quad \lambda_{sn}^{(\alpha)}=2^sn\,!/(n-s)!\,,$$

$$C_{stn\alpha}^2=2^{s-t}(n-t)!/(n-s)!\,,\quad C_{stn\alpha}\leqslant c_{st}\,(2n)^{-(t-s)}\ .$$

Интересно отметить, что $C_{stn\alpha}$ не зависят от α в случае веса Лагерра.

Лемма 2. *Пусть $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ и выполнены условия леммы 1. Тогда для любого $0 \leqslant s \leqslant m$ справедливо тождество*

$$\int\limits_a^b \omega_{\alpha+s}\, D^s p_n^{(\alpha)}\, D^s v\, dx = \lambda_{sn}^{(\alpha)} \int\limits_a^b \omega_\alpha p_n^{(\alpha)}\, v\, dx \quad \forall\, v \in V_{\omega_\alpha}^m(\Omega). \tag{9}$$

3. Многочлены наилучшего приближения.

Напомним, что ортогональная система $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ гильбертового пространства H образует базис в нем (является полной), если в H не существует ненулевого элемента ортогонального всем p_n. В этом случае произвольный элемент $u \in H$ представляется рядом Фурье

$$u = \sum_{n=0}^\infty c_n p_n, \quad c_n = (u, p_n)_H / \|p_n\|_H^2.$$

Кроме того, $u_N = \sum\limits_{n=0}^N c_n p_n$ является элементом наилучшего приближения u из пространства H_N — линейной оболочки $p_0, p_1, \ldots, p_N$.

Теорема 1. *Пусть $m \geqslant 0$; ω_α — одна из весовых функций* (1) — (3)*, $\{p_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ — соответствующая ей ортогональная система. Тогда*
a) система $\{p_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ образует ортогональный базис в $V_{\omega_\alpha}^m(\Omega)$;
b) если $u = \sum\limits_{n=0}^\infty c_n p_n^{(\alpha)} \in V_{\omega_\alpha}^m(\Omega)$, то для $s = 1, \ldots, m$

$$|u|^2_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \sum_{n=s}^\infty \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2\,, \quad h_n^{(\alpha)} = \|p_n^{(\alpha)}\|^2_{L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)}\,. \tag{10}$$

Доказательство. После суммирования соотношений (9) по s получим

$$\big(p_n^{(\alpha)}, v\big)_{V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \lambda_{mn}\, \big(p_n^{(\alpha)}, v\big)_{L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)} \quad \forall\, v \in V^m_{\omega_\alpha}(\Omega), \tag{11}$$

где $\lambda_{mn} = \sum\limits_{s=0}^m \lambda_{sn}^{(\alpha)} > 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Из тождества (11) следует как ортогональность системы $\{p_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ в $V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)$, так и ее полнота в $V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)$, т. е. утверждение a), поскольку такими же свойствами система обладает в $L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)$. Для доказательства b) определим $u_N = \sum\limits_{n=0}^N c_n p_n^{(\alpha)}$ и воспользуемся равенством, вытекающим из (9):

$$\int\limits_a^b \omega_{\alpha+s}\, D^s p_n^{(\alpha)}(x) D^s p_m^{(\alpha)}(x)\, dx = \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, \delta_{nm}\,.$$

Прямые вычисления приводят к формуле

$$|u_N|^2_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \sum_{n=s}^N \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2\,. \tag{12}$$

Так как u_N сходится к u в $V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)$, то из (12) предельным переходом получается (10).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1; $u \in V^m_{\omega_\alpha}(\Omega)$; $u_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1}$ — наилучшее приближение u в $L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)$. Тогда*
(i) u_{N-1} есть также наилучшее приближение u в $V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)$ при $s \leqslant m$;

(ii) при $0 \leqslant s \leqslant m$ *справедливы точные оценки*

$$|u - u_{N-1}|_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)} \leqslant C_{stN\alpha} |u|_{V^t_{\omega_\alpha}(\Omega)}, \tag{13}$$

$$\|u - u_{N-1}\|_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)} \leqslant B_{stN\alpha} |u|_{V^t_{\omega_\alpha}(\Omega)}, \tag{14}$$

где $t = s, s+1, \ldots, \min(N, m)$, $B^2_{stN\alpha} = \sum\limits_{j=0}^{s} C^2_{j\,tN\alpha}$. *Равенство в оценках достигается при* $u = p_N^{(\alpha)}$.

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из утверждения а) теоремы 1 и

$$u_{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n p_n^{(\alpha)}, \quad c_n = \frac{(u, p_n^{(\alpha)})_{L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)}}{\|p_n^{(\alpha)}\|^2_{L^2_{\omega_\alpha}(\Omega)}}, \quad u - u_{N-1} = \sum_{n=N}^{\infty} c_n p_n^{(\alpha)}.$$

Докажем (ii). Согласно (10)

$$|u - u_{N-1}|^2_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2 = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\lambda_{sn}^{(\alpha)}}{\lambda_{tn}^{(\alpha)}}\, \lambda_{tn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2. \tag{15}$$

По условию $s \leqslant t \leqslant N$ и в силу леммы 1 функция $n \to C^2_{stn\alpha} = \lambda_{sn}^{(\alpha)}/\lambda_{tn}^{(\alpha)}$ является убывающей при $s < t$. Поэтому, снова пользуясь (10), получаем

$$|u - u_{N-1}|^2_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)} \leqslant C^2_{stN\alpha} \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_{tn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2 \leqslant C^2_{stN\alpha} \sum_{n=t}^{\infty} \lambda_{tn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2 = C^2_{stN\alpha}\, |u|^2_{V^t_{\omega_\alpha}(\Omega)}. \tag{16}$$

Точность этой оценки следует из того, что при $u = p_N^{(\alpha)}$ суммы в (15) содержат лишь одно ненулевое слагаемое с $n = N$ и (16) превращается в точное равенство. Оценка (14) является следствием оценок (13).

Теорема 3. (неравенства типа Маркова) *Пусть* p_N *есть произвольный многочлен степени* N. *Тогда при* $0 \leqslant s < t$ *справедлива точная оценка*

$$|p_N|_{V^t_{\omega_\alpha}(\Omega)} \leqslant C^{-1}_{stN\alpha}\, |p_N|_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)}, \tag{17}$$

где постоянная $C_{stN\alpha}$ *та же, что и в теореме 2. Равенство в* (17) *достигается при* $p_N = p_N^{(\alpha)}$.

Доказательство. Пусть $p_N = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n p_n^{(\alpha)}$. Учитывая, что функция $n \to C^2_{tsn\alpha} = \lambda_{tn}^{(\alpha)}/\lambda_{sn}^{(\alpha)} = C^{-2}_{stn\alpha}$ возрастает при $s < t$, согласно теореме 1 будем иметь

$$|p_N|^2_{V^t_{\omega_\alpha}(\Omega)} = \sum_{n=t}^{N} \lambda_{tn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2 = \sum_{n=t}^{N} C^2_{tsn\alpha} \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2 \leqslant C^2_{tsN\alpha} \sum_{n=t}^{N} \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2_{tsN\alpha} \sum_{n=s}^{N} \lambda_{sn}^{(\alpha)}\, h_n^{(\alpha)}\, c_n^2 = C^2_{tsN\alpha}\, |p_N|^2_{V^s_{\omega_\alpha}(\Omega)}. \tag{18}$$

Точность этой оценки следует из того, что при $p_N = p_N^{(\alpha)}$ суммы в (18) содержат лишь одно ненулевое слагаемое с $n = N$ и (18) превращается в точное равенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.

REFERENCES

1. **Szego G.** Orthogonal Polynomials. — New-York: American Mathematical Society, 1959.